

## УСТАЛЕНІ РУХИ БАГАТОКУЛЬОВИХ (БАГАТОМАЯТНИКОВИХ) АВТОБАЛАНСИРІВ

*У рамках плоскої моделі досліджена кількість і умови існування тих усталених рухів ротора з багатокульовим (багатомаятниковим) автобалансиром, у яких коригувальні вантажі обертаються синхронно з ротором.*

**автобалансир, балансування, коригувальний вантаж, ротор**

Для зрівноважування на ходу роторів, що швидко обертаються –шпинделів верстатів, абразивних кругів шліфувальних машин, екстракторів, центрифуг, сепараторів, тощо, широко застосовуються автобалансувальні пристрої (АБП) з твердими коригувальними вантажами (КВ), такі як маятникові, кільцеві, кульові і т.д. [1-3]. У них КВ на закритичних швидкостях обертання ротора з часом самі приходять у положення, у якому зрівноважують ротор і далі обертаються з ним як одне ціле, поки не почне мінятися дисбаланс, швидкість обертання ротора, або не з'являться збурення різного походження. На сьогоднішній день не створена аналітична теорія зрівноваження ротора класичними АБП з багатьма КВ. Так, основні дослідження проведені для АБП з двома КВ [1-6], і одержані результати необґрунтовано переносяться на загальний випадок – АБП з багатьма КВ. В цій роботі аналітично досліджуються усталені рухи ротора і багатокульового (багатомаятникового) АБП, у яких КВ обертаються синхронно з ротором, що є передумовою побудови аналітичної теорії таких пристроїв.

Для дослідження усталених рухів використана плоска модель ротора і автобалансира (рис. 1), побудована у роботі [7]. Там же одержані диференціальні рівняння руху системи у комплексному вигляді:

$$R_j = \ddot{\alpha}_j + h_j \dot{\alpha}_j - \frac{i\tilde{R}_m R_{j_j}}{2} [(\ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s)e^{-i\alpha_j} - (\ddot{\bar{s}} - 2iR_\omega \dot{\bar{s}} - R_\omega^2 \bar{s})e^{i\alpha_j}] = 0, \quad / j = \overline{1, n} / ,$$

$$R_{n+1} = \ddot{s} + 2iR_\omega \dot{s} - R_\omega^2 s + H(\dot{s} + iR_\omega s) + s -$$

$$-\sum_{j=1}^n e_j (\dot{\alpha}_j^2 + 2R_\omega \dot{\alpha}_j + R_\omega^2 - i\ddot{\alpha}_j) e^{i\alpha_j} = e_0 R_\omega^2, \quad R_{n+2} = \bar{R}_{n+1}, \quad (1)$$

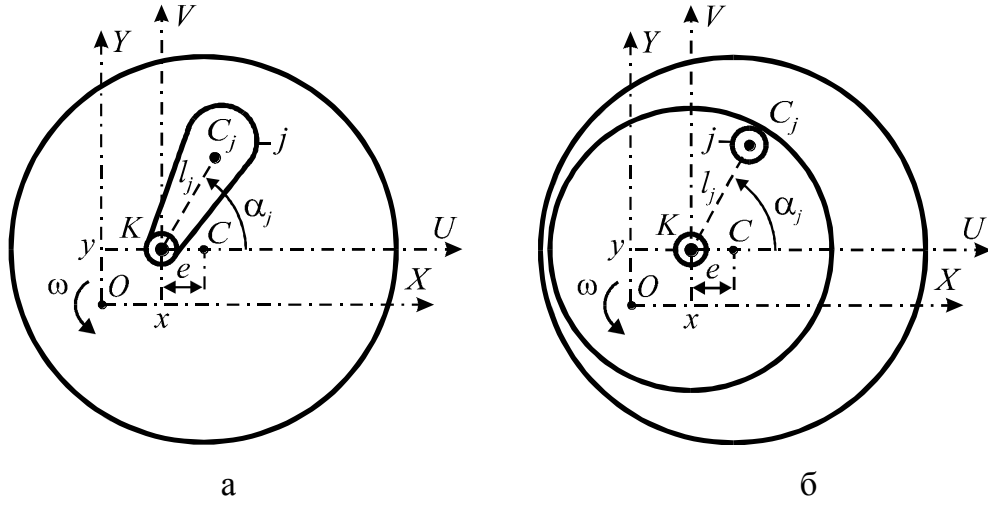


Рисунок 1 – Плоска модель ротора і маятникового (а), кульового (б) АБП

де:

$$\tilde{R}_m, R_\omega, H, e_0; \quad e_j, R_{J_j}, h_j, \quad / j = \overline{1, n} / , \quad \sum_{j=1}^n e_j = 1, \quad (2)$$

- безрозмірні параметри;

$$s, \bar{s}; \quad \alpha_j \quad / j = \overline{1, n} / ; \quad \tau, \quad (3)$$

- безрозмірні залежні комплексні та дійсні змінні і час.

В усталених рухах, у яких КВ обертаються синхронно з ротором, похідні дорівнюють нулю і система (1) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} R_j &= \frac{i\tilde{R}_m R_{J_j}}{2} R_\omega^2 (\tilde{s} e^{-i\tilde{\alpha}_j} - \tilde{\bar{s}} e^{i\tilde{\alpha}_j}) = 0, \quad / j = \overline{1, n} / , \\ R_{n+1} &= [(1 - R_\omega^2) + iH R_\omega] \tilde{s} - R_\omega^2 \left( \sum_{j=1}^n e_j e^{i\tilde{\alpha}_j} + e_0 \right) = 0, \\ R_{n+2} &= [(1 - R_\omega^2) - iH R_\omega] \tilde{\bar{s}} - R_\omega^2 \left( \sum_{j=1}^n e_j e^{-i\tilde{\alpha}_j} + e_0 \right) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\tilde{s}, \tilde{\bar{s}}, \tilde{\alpha}_j \quad / j = \overline{1, n} /$  - сталі параметри, що визначають усталений рух.

В основних рухах ротор зрівноважений і відсутнє відхилення валу від осі обертання:

$$\tilde{s} = \bar{\tilde{s}} = 0, \quad \sum_{j=1}^n e_j e^{i\tilde{\alpha}_j} + e_0 = 0, \quad \sum_{j=1}^n e_j e^{-i\tilde{\alpha}_j} + e_0 = 0. \quad (5)$$

Якщо  $n \geq 3$ , то у системи ротор-АБП сім'я основних рухів. Будемо розрізняти одну сім'ю основних рухів від іншої за дисбалансом  $e_0$ , який зрівноважується. З (5) видно, що основний рух існує за умови, що ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора ( $e_0 < 1$ ).

В побічних рухах ротор не зрівноважений і вал відхилений від осі обертання. Перші  $n$  рівнянь в системі (4) будуть виконуватися, якщо

$$\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} - \bar{\tilde{s}} e^{i\tilde{\gamma}} = 0, \quad \alpha_j = \tilde{\gamma} + k_j \pi, \quad k_j = 0, 1; \quad / j = \overline{1, n} / , \quad (6)$$

де  $\tilde{\gamma}$  - деякий сталий кут. В таких рухах дисбаланси всіх КВ на одній лінії, і КВ у яких  $k_j = 0$  відхилені у один бік, протилежний по відношенню до КВ, у яких  $k_j = 1$ . Введемо у розглядання  $n$  - розрядне двійкове число  $k$  і відповідне число  $e(k)$ :

$$k = k_n \dots k_1, \quad e(k) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k_j} e_j. \quad (7)$$

У десятковій системі числення  $k = 0, 1, 2, \dots, (2^n - 1)$ , тобто всього  $2^n$  можливих комбінацій. Зауважимо, що:

- кожному додатному (від'ємному) числу  $e(k)$  відповідає рівне за модулем від'ємне (додатне) число  $e(2^n - 1 - k)$

$$e(k) = -e(2^n - 1 - k); \quad (8)$$

- кількість від'ємних і додатних  $e(k)$  однакова, а кількість нульових – парна.

Зробимо заміну змінних

$$\tilde{u} = \frac{i}{2} (\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} - \bar{\tilde{s}} e^{i\tilde{\gamma}}), \quad \tilde{v} = \frac{1}{2} (\tilde{s} e^{-i\tilde{\gamma}} + \bar{\tilde{s}} e^{i\tilde{\gamma}}). \quad (9)$$

Зауважимо, що  $\tilde{u}, \tilde{v}$  - дійсні змінні. Тоді система рівнянь (4) зведеться до вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{u} = 0, \quad (R_{n+1} e^{-i\tilde{\gamma}} + R_{n+2} e^{i\tilde{\gamma}}) / 2 &= (1 - R_\omega^2) \tilde{v} - R_\omega^2 [e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}] = 0, \\ (R_{n+1} e^{-i\tilde{\gamma}} - R_{n+2} e^{i\tilde{\gamma}}) / 2 &= H R_\omega \tilde{v} - R_\omega^2 e_0 \sin \tilde{\gamma} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Оскільки  $\tilde{u} = 0$ , то  $|\tilde{v}|$  - безрозмірний прогин вала.

1. Розглянемо випадок відсутності зовнішніх сил опору ( $H=0$ ). Система (10) прийме вигляд

$$\tilde{u} = 0, (1 - R_\omega^2)\tilde{v} - R_\omega^2[e(k) + e_0 \cos \tilde{\gamma}] = 0, -R_\omega^2 e_0 \sin \tilde{\gamma} = 0. \quad (11)$$

Відповідно до останнього рівняння, виділяємо такі випадки.

а)  $\sin \gamma = 0, e_0 \neq 0$ . Оскільки при заміні кута  $\gamma$  на кут  $(\gamma + \pi)$  маятники (кулі) змінюють орієнтацію з  $e(k)$  на  $e(2^n - 1 - k)$ , то у подальшому, не обмежуючи загальності, приймаємо, що  $\gamma = 0, (\cos \gamma = 1)$ . Тоді з системи (11) знаходимо

$$\tilde{u}(k) = 0, \tilde{v}(k) = \frac{R_\omega^2(e_0 + e(k))}{1 - R_\omega^2}, \gamma(k) = 0 \text{ / } k = \overline{0, 2^n - 1} \text{ /}. \quad (12)$$

Таким чином, всього маємо до  $2^n$  різних побічних усталених рухів, у яких:

- КВ відхилені у важкий, чи легкий бік ротора так, що створюють сумарний дисбаланс з важкого  $e(k) > 0$ , чи легкого  $e(k) < 0$  боку ротора, або зовсім дисбаланс не створюють  $e(k) = 0$ ;

- кожному побічному руху  $k$  відповідає рух  $(2^n - 1 - k)$ , у якому КВ відхилені у протилежні боки, і тому кількість рухів, у яких сумарний дисбаланс КВ з важкого боку ротора дорівнює кількості рухів, у яких сумарний дисбаланс КВ з легкого боку ротора;

- сумарний дисбаланс системи дорівнює  $(e_0 + e(k))$  і лежить на лінії дисбалансу ротора;

- на дорезонансних швидкостях обертання ротора вал відхиляється у бік вектора сумарного дисбалансу системи, а на зарезонансних – у протилежний бік.

б)  $e_0 = 0$ . З системи (11) знаходимо

$$\tilde{u}(k) = 0, \tilde{v}(k) = \frac{R_\omega^2 e(k)}{1 - R_\omega^2}, \gamma(k) \in R, k \in \{0, 1, \dots, (2^{n-1} - 1) : e(k) \neq 0\}. \quad (13)$$

Зауважимо, що:

- якщо  $e(k) = 0$ , то це основний рух і тому відповідні випадки виключені;
- значення  $k \in \{2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1\}$  охоплюються довільністю параметрів  $\gamma(k)$ , бо при заміні кута  $\gamma$  на кут  $(\gamma + \pi)$  КВ змінюють орієнтацію з  $e(k)$  на  $e(2^n - 1 - k)$ ;
- на дорезонансних швидкостях обертання ротора вал відхиляється у бік вектора сумарного дисбалансу КВ, а на зарезонансних – у протилежний бік.

Таким чином маємо до  $2^{n-1}$  однопараметричних сімей побічних усталених рухів.

2. Розглянемо випадок наявності зовнішніх сил опору ( $H \neq 0$ ). Шукаємо аналоги рухів, знайдених за відсутності сил опору. З останнього рівняння в (10) видно, що не існують аналоги побічних рухів (13), що виникали за відсутності дисбалансу. Шукаємо аналоги рухів (12). Для цього були розв'язані останні два рівняння системи (10). Розв'язки ілюструє рис. 3., на якому побудовані у полярній системи координат графіки  $R_\omega(\gamma)$ . Розглядаємо різні випадки.

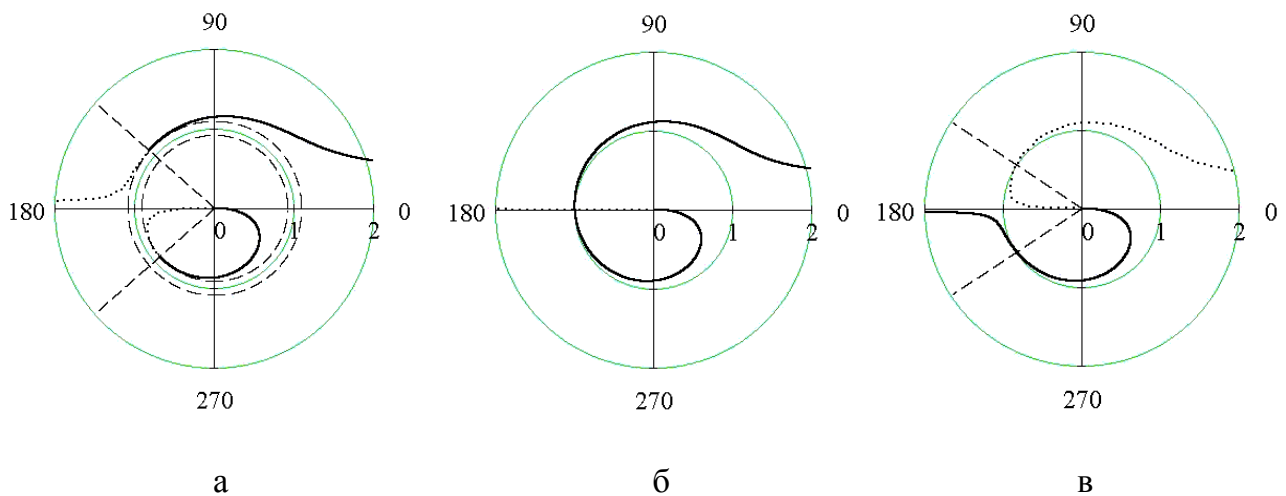
а)  $|e(k)| > e_0$ . Графіки зображені на рис. 2, а. Існують дві кутові швидкості:

$$R_{\omega 1/2}^* = \frac{\sqrt{4e_0^2 + H^2(e^2(k) - e_0^2)} \mp H\sqrt{e^2(k) - e_0^2}}{2e_0}, \quad 0 < R_{\omega 1}^* < 1 < R_{\omega 2}^*, \quad R_{\omega 1}^* R_{\omega 2}^* = 1, \quad (14)$$

такі, що побічні рухи  $k$  і  $(2^n - 1 - k)$  існують за умови, що

$$R_\omega \in (0, R_{\omega 1}^*] \cup [R_{\omega 2}^*, +\infty). \quad (15)$$

З рис. 2, а видно, що при  $R_\omega \sim 0$  спільний центр маятників відхилений у важкий бік ротора ( $\gamma \sim 0$ ), або у легкий ( $\gamma \sim \pi$ ). Перший випадок відповідає руху  $k$ , а другий -  $(2^n - 1 - k)$ . Із збільшенням  $R_\omega$  спільний центр мас маятників у русі  $k$  повертається за ходом стрілки годинника, а у русі  $(2^n - 1 - k)$  - проти. При  $R_\omega = R_{\omega 1}^*$  два рухи зливаються ( $\gamma \sim -(\pi - \arccos e_0/e(k))$ ), а при переході через  $R_{\omega 1}^*$  - зникають. Отже, відбувається біфуркація положень рівноваги системи.



а – випадок, коли  $e_0 < |e(k)|$ ; б – випадок, коли  $e_0 = |e(k)|$ ; в – випадок, коли  $e_0 > |e(k)|$

Рисунок 2 – До класифікації побічних усталених рухів при наявності сил опору

При  $R_{\omega} = R_{\omega 2}^*$  два рухи знову з'являються, причому при цьому вони співпадають ( $\gamma \sim (\pi - \arccos e_0 / e(k))$ ), а при переході через  $R_{\omega 2}^*$  – вони розділяються. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора ( $R_{\omega} \rightarrow +\infty$ ) у русі  $k$  кут  $\gamma$  прямує до  $+0$ , а у русі  $(2^n - 1 - k)$  – до  $\pi - 0$ .

б)  $e_0 = |e(k)|$ . Графіки зображені на рис. 2, б. У русі  $k$  спільний центр мас маятників початково відхилений у важкий бік ротора, а у русі  $(2^n - 1 - k)$  – у легкий. В другому русі ротор зрівноважений і тому це основний рух. У русі  $k$  зі збільшенням кутової швидкості обертання ротора спільний центр мас КВ починає повертатися за ходом стрілки годинника. При досягненні резонансної швидкості обертання ротора ( $R_{\omega} = 1$ ) цей кут дорівнює  $-\pi$ . При цьому основний і побічний рух зливаються. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора  $R_{\omega} \rightarrow +\infty$  рух  $k$  відходить від основного руху і кут повороту  $\gamma$  прямує до  $(-2\pi + 0)$ , або до  $+0$ .

в)  $|e(k)| < e_0$ . Графіки зображені на рис. 2, в. Видно, що при  $R_{\omega} \sim 0$  спільний центр маятників відхилений у важкий бік ротора ( $\gamma \sim 0$ ), або у легкий ( $\gamma \sim \pi$ ). Перший випадок відповідає руху  $k$ , а другий –  $(2^n - 1 - k)$ . Зі збільшенням  $R_{\omega}$  спільний центр мас КВ у двох рухах повертається за ходом стрілки годинника. При подальшому зростанні кутової швидкості обертання ротора ( $R_{\omega} \rightarrow +\infty$ ) у русі  $k$  кут  $\gamma$  прямує до  $(-\pi + 0)$ , а у русі  $(2^n - 1 - k)$  – до  $+0$ , тобто рухи “міняються” місцями. В цьому випадку рухи ділимо по положенню спільного центру мас КВ при  $R_{\omega} = 0$ .

Для остаточної класифікації побічних усталених рухів введемо нову нумерацію для  $e(k)$ . Розташуємо  $e(k)$  у порядку спадання, відкинемо від’ємні величини, а серед нульових – відкинемо половину рухів, яка одержується із залишених поворотом маятників на  $180^\circ$ . Введемо нову нумерацію:

$$e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_{2^{n-1}} \geq 0. \quad (16)$$

Зауважимо, що  $e_1 = 1$ . З властивості (8) для  $e(k)$  випливає, що таких значень буде  $2^{n-1}$ . Кожному значенню  $e_j$  відповідає пара побічних усталених рухів, зображених на рис. 2. У найбільш загальному випадку ці рухи будуть різними. Аналітично рухи визначаються наступними рівняннями:

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_{k1} &= \begin{cases} \tilde{\gamma}(k)_1, & (R_{\omega} \leq R_{\omega 1}^*(k) \wedge e_k > e_0) \vee (e_k \leq e_0); \\ \tilde{\gamma}(k)_2, & R_{\omega} > R_{\omega 2}^*(k) \wedge e_k > e_0, \end{cases} \\ \tilde{\gamma}_{k2} &= \begin{cases} \tilde{\gamma}(k)_2, & (R_{\omega} \leq R_{\omega 1}^*(k) \wedge e_k > e_0) \vee (e_k \leq e_0); \\ \tilde{\gamma}(k)_1, & R_{\omega} > R_{\omega 2}^*(k) \wedge e_k > e_0, \end{cases} \\ \tilde{\nu}_{k1/2} &= \frac{R_{\omega}^2(e_k + e_0 \cos \tilde{\gamma}_{k1/2})}{1 - R_{\omega}^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(k)_{1/2} &= 2 \operatorname{arctg} \frac{-e_0(R_{\omega}^2 - 1) \pm \sqrt{e_0^2(R_{\omega}^2 - 1)^2 + H^2 R_{\omega}^2(e_0^2 - e_k^2)}}{H R_{\omega}(e_0 - e_k)}, \\ R_{\omega 1/2}^*(k) &= \frac{\sqrt{4e_0^2 + H^2(e_k^2 - e_0^2)} \mp H \sqrt{e_k^2 - e_0^2}}{2e_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Таким чином, система ротор – АБП:

- має однопараметричну сім'ю основних рухів, за умови, що балансувальної ємності АБП вистачає для зрівноваження ротора;
- при відсутності зовнішніх сил опору і при наявності дисбалансу має до  $2^n$  різних побічних усталених рухів, а при відсутності дисбалансу - до  $2^{n-1}$  однопараметричних сімей побічних усталених рухів;
- при наявності зовнішніх сил опору і при наявності дисбалансу має до  $2^n$  різних побічних усталених рухів, а при відсутності сил опору не має побічних рухів, у яких КВ обертаються синхронно з ротором.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Thearle E. L. Automatic dynamic balancers Part 2 – Ring, pendulum and ball balancers // Machine Design, 1950b, Vol22 No 10, pp 103-106, 152.
2. Гусаров А.А., Сусанин В.И., Шаталов Л.Н., Грушин Б.М. Автоматическая балансировка роторов машин. -М.: Наука, 1997. -151 с.
3. Детинко Ф.М. Об устойчивости работы атобалансира для динамической балансировки // Изв. АН СССР.ОТН. Мех. и Машиностр., -1956. № 4, -С.38-45.
4. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. -М.: Наука, 1971. -896с.

5. Кравченко В.И. Автобалансирующие устройства для улучшения динамических характеристик машин: Автореф. дис... канд. техн. наук: 01.02.06 / АН СССР, ин-т машиностроения им. А.А.Благонравова. -М., 1989. -18 с.
6. Hwang C. H., Chung J. Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races // Jap. Soc. Mech. Engrs Int. J., 1999, **42**, 265–272.
7. Динаміка багатокільових (багатомаятникових) автобалансирів. Стійкість основних рухів / Філімоніхін Г.Б.; Кіровоград. держ. техн. ун-т. – Кіровоград, 2003. – 47 с.: іл. – Бібліогр.: 17 назв. – Укр. – Деп. в ДНТБ України 20.10.03, №144-Ук2003.

Одержано 04.12.03